Seri bahan kuliah Algeo #11

Vektor di Ruang Euclidean
(bagian 2)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Sifat-sifat aljabar vektor

THEOREM 3.1.1 *If* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, *and* $\mathbf{w}$ *are vectors in* R^n, *and if* k *and* m *are scalars, then:*

(*a*) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(*b*) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(*c*) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(*d*) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

(*e*) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$

(*f*) $(k + m)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + m\mathbf{u}$

(*g*) $k(m\mathbf{u}) = (km)\mathbf{u}$

(*h*) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Kombinasi linier vektor

- Sebuah vektor dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor lain.

  Contoh: $\mathbf{u} = 3\mathbf{v} + 2\mathbf{w} - 5\mathbf{x}$; $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, dan $\mathbf{x}$ adalah vektor-vektor di R^3

- Secara umum, jika $\mathbf{w}$ adalah vektor di R^n, maka $\mathbf{w}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_r}$ jika $\mathbf{w}$ dapat dinyatakan sebagai

$$\boxed{\mathbf{w} = k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + \dots + k_r\mathbf{v_r}}$$

yang dalam hal ini k_1, k_2, ..., k_r adalah skalar.

Contoh 1: Tentukan semua k_1, k_2, dan k_3 sehingga

$$k_1(1, 2, 3) + k_2(2, -3, 1) + k_3(3, 2, -1) = (6, 14, -2)$$

<u>Penyelesaian</u>:

$$k_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\14\\-2\end{bmatrix}$$

Diperoleh sistem persamaan linier (SPL):

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= 6 \\ 2k_1 - 3k_2 + 2k_3 &= 14 \\ 3k_1 + k_2 - k_3 &= -2 \end{aligned}$$

Selesaikan SPL di atas dengan metode eliminasi Gauss, diperoleh:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 3$$

Vektor satuan

- Vektor satuan (*unit vector*) adalah vektor dengan panjang = 1

- Dilambangkan dengan **u**
- Jika **v** adalah vektor di R^n dan $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ maka $\boxed{\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}}$ atau $\boxed{\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}}$
- Vektor **u** memilik arah yang sama dengan **v**
- Proses "membagi" sebuah vektor **v** dengan panjangnya dinamakan **menormalisasi vektor**.

  (sebenarnya bukan membagi, karena vektor tidak bisa dibagi)

Contoh 2: Misalkan **v** = (6, –2 , 3), maka norma vektor **v** adalah

$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7$ dan vektor satuannya:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{7}\,(6, -2\,,\,3) = \left(\frac{6}{7}\,,\,-\frac{2}{7},\frac{3}{7}\right)$$

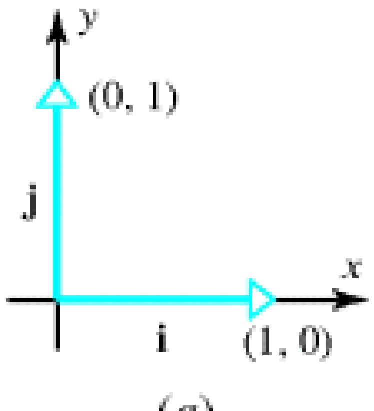
Periksa bahwa panjang **u** adalah satu,

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(6/7)^2 + (-2/7)^2 + (3/7)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{36}{49} + \frac{4}{49} + \frac{9}{49}}$$

$$= \sqrt{\frac{49}{49}} = 1$$

Vektor satuan standard



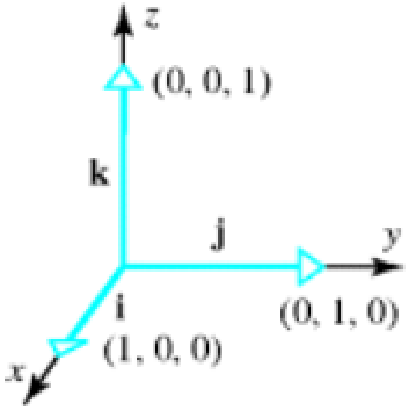
(a)

- Vektor satuan standard di R^2 adalah **i** dan **j**:

  i = (1, 0) dan **j** = (0, 1)

- Setiap vektor **v** = (v_1, v_2) di R^2 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier

  v = v_1**i** + v_2**j**



(b)

- Vektor satuan standard di R^3 adalah **i**, **j**, dan **k**:

  i = (1, 0, 0), **j** = (0, 1, 0), dan **k** = (0, 0, 1),

- Setiap vektor **v** = (v_1, v_2, v_3) di R^3 dapat dinyatakan sebagai kombinasi liner **v** = v_1**i** + v_2**j** + v_3**k**

- Vektor satuan standard di R^n adalah $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$,

  $\mathbf{e_1} = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., dan $\mathbf{e_n} = (0, 0, 0, \ldots, 1)$,

- Setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ di R^n dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e_1} + v_2\mathbf{e_2} + \ldots + v_n\mathbf{e_n}$

Contoh 3:

(i) $\mathbf{v} = (8, -4) = 8\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

(ii) $\mathbf{v} = (6, -2 , 3) = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

(ii) $\mathbf{v} = (4, 6 , 10, -1) = 4\mathbf{e_1} + 6\mathbf{e_2} + 10\mathbf{e_3} - \mathbf{e_4}$

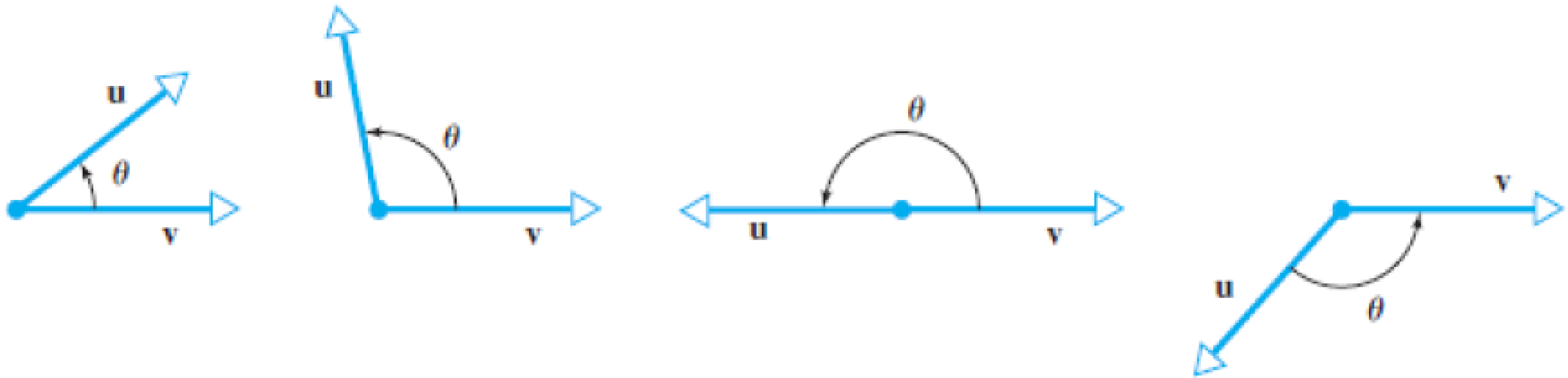
Perkalian titik (*dot product*)

- Jika **u** dan **v** adalah vektor tidak nol di R^2 atau R^3, maka perkalian titik (*dot product*), atau disebut juga *Euclidean inner product*, **u** dan **v** adalah

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta}$$

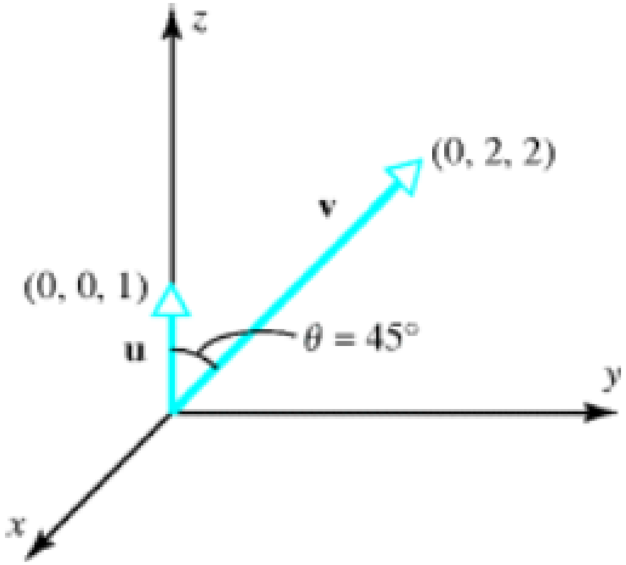
yang dalam hal ini θ adalah sudut yang dibentuk oleh **u** dan **v**.

- Jika **u** = 0 atau **v** = 0, maka $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$



Contoh 4: Misalkan **u** = (0, 0, 1) dan **v** = (0, 2, 2), sudut yang dibentuk oleh **u** dan **v** dapat ditentukan dari gambar adalah 45°.

Maka dapat dihitung,



$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta$$

$$= \left(\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}\right)\left(\sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2}\right) \cos 45°$$

$$= (\sqrt{1})(\sqrt{8})\ \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{16}}{2}$$

$$= 2$$

- Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ adalah dua vektor di R^3 maka dapat dibuktikan (bukti tidak diperlihatkan di sini) bahwa

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}$$

- Secara umum, jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah dua buah vektor di R^n maka

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n}$$

Contoh 5: Tinjau kembali Contoh 4, **u** = (0, 0, 1) dan **v** = (0, 2, 2), maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (0)(0) + (0)(2) + (1)(2) = 0 + 0 + 2 = 2$$

sama dengan hasil pada Contoh 4.

Contoh 6: Misalkan **u** = (–1, 3, 5, 7) dan **v** = (–3, –4, 1, 0), maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1)(-3) + (3)(-4) + (5)(1) + (7)(0)$$

$$= 3 - 12 + 5 + 0$$

$$= -4$$

- Dari rumus perkalian titik $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta$ dapat ditulis menjadi

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}}$$

dan karena $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$, maka

$$\boxed{\cos\theta = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + unvn}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}}$$

Contoh 6: Carilah sudut antara vektor **u** = (2, –1, 1) dan **v** = (1, 1, 2).

Penyelesaian:

$$\cos\theta = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

$$= \frac{(2)(1)+(-1)(1)+(1)(2)}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(1)^2}\cdot\sqrt{(1)^2+(1)^2+(2)^2}}$$

$$= \frac{2-1+2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}$$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \text{arc}\cos\frac{1}{2} = 60^\circ$$

Sifat-sifat perkalian titik

THEOREM 3.2.2 *If* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, *and* $\mathbf{w}$ *are vectors in* R^n, *and if* k *is a scalar, then:*

(*a*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ **[Symmetry property]**

(*b*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ **[Distributive property]**

(*c*) $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$ **[Homogeneity property]**

(*d*) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ *and* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ *if and only if* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ **[Positivity property]**

THEOREM 3.2.3 *If* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, *and* $\mathbf{w}$ *are vectors in* R^n, *and if* k *is a scalar, then:*

(*a*) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{0} = 0$

(*b*) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

(*c*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

(*d*) $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

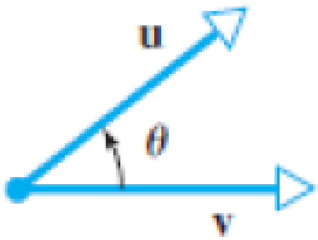
(*e*) $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$

Teorema: Misalkan **u** dan **v** adalah vector-vector di R^2 atau R^3. Kondisi di bawah ini berlaku

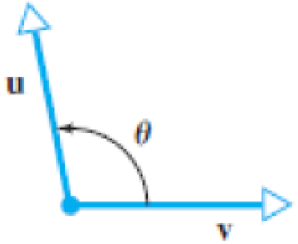
(1) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$ dan $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2}$

(2) Jika **u** dan **v** adalah vektor tidak-nol dan θ adalah sudut antara kedua vector, maka

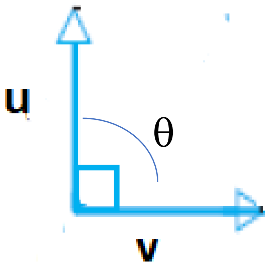
- θ adalah sudut lancip ($0 < \theta < 90°$) jika dan hanya jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$
- θ adalah sudut tumpul ($90 < \theta < 180°$) jika dan hanya jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$
- $\theta = 90°$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ($\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ atau ortogonal)



sudut lancip



sudut tumpul



ortogonal

Contoh 7:

(i) Misalkan **u** = (6, 3, 3) dan **v** = (4, 0, –6), maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (6)(4) + (3)(0) + (3)(-6)$$

$= 24 + 0 - 18$

$= 6 > 0$

Jadi, **u** dan **v** membentuk sudut lancip

(ii) Misalkan **u** = (4, 1, 6) dan **v** = (–3, 0, 2), maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (4)(-3) + (1)(0) + (6)(2)$$

$= -12 + 0 + 12$

$= 0$

Jadi, **u** dan **v** saling tegak lurus (ortogonal)

Ketidaksamaan Cauchy-Schwarz

THEOREM 3.2.4 Cauchy–Schwarz Inequality

If $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *and* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *are vectors in* R^n, *then*

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \tag{22}$$

or in terms of components

$$|u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n| \leq (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)^{1/2}(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)^{1/2} \tag{23}$$

Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)

Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1804-1889)

Dot Products and Matrices

Table 1

Form	Dot Product	Example	
u a column matrix and **v** a column matrix	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u}$	$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{u}^T\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -7$ $\mathbf{v}^T\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = -7$
u a row matrix and **v** a column matrix	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u}^T$	$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{u}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -7$ $\mathbf{v}^T\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = -7$
u a column matrix and **v** a row matrix	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{u}^T\mathbf{v}^T$	$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{v}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = -7$ $\mathbf{u}^T\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -7$
u a row matrix and **v** a row matrix	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}^T = \mathbf{v}\mathbf{u}^T$	$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -7$ $\mathbf{v}\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = -7$

Ortogonal dan ortonormal

- Dua buah vektor tak-nol **u** dan **v** di R^n dikatakan **ortogonal** atau saling tegak lurus jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$,

- Vektor nol selalu ortogonal dengan *setiap* vektor di R^n

- Himpunan vektor di R^n disebut **himpunan ortogonal** jika setiap pasang vektor di dalam himpunan tersebut ortogonal.

- Himpunan ortogonal vektor-vektor satuan dinamakan **himpunan ortonormal**.

Contoh 8:

(a) Himpunan vektor $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ dengan $\mathbf{v_1} = (-2, 1, 1)$, $\mathbf{v_2} = (1, 0, 2)$, dan $\mathbf{v_3} = (-2, -5, 1)$ membentuk himpunan orthogonal karena

$$\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = (-2)(1) + (1)(0) + (1)(2) = -2 + 0 + 2 = 0$$

$$\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_3} = (-2)(-2) + (1)(-5) + (1)(1) = -4 - 5 + 1 = 0$$

$$\mathbf{v_2} \cdot \mathbf{v_3} = (1)(-2) + (0)(-5) + (2)(1) = -2 + 0 + 2 = 0$$

(ii) Himpunan vektor $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ dengan $\mathbf{v_1} = (-3, 4, -1)$, $\mathbf{v_2} = (1, 2, 2)$, dan $\mathbf{v_3} = (4, -3, 0)$ bukan himpunan orthogonal karena

$$\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = (-3)(1) + (4)(2) + (-1)(2) = -3 + 8 - 2 = 3 \neq 0$$

(cukup ditunjukkan satu saja perkalian titik dua vector yang tidak menghasilkan nol untuk menyatakan bukan himpunan ortoginal)

Contoh 9: Himpunan vektor satuan {**i**, **j**, **k**} di R^3 adalah himpunan orthogonal sekaligus himpunan ortonormal, karena

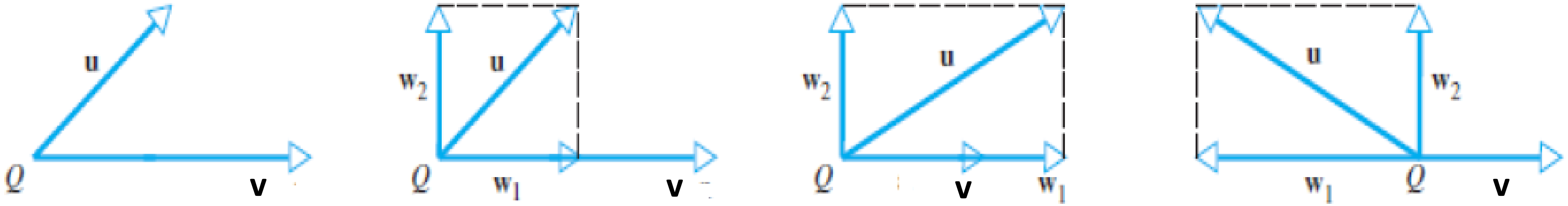
$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = (1)(0) + (0)(1) + (0)(0) = 0$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = (1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) = (1)(0) + (0)(0) + (0)(1) = 0$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = (0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1) = (0)(0) + (1)(0) + (0)(1) = 0$$

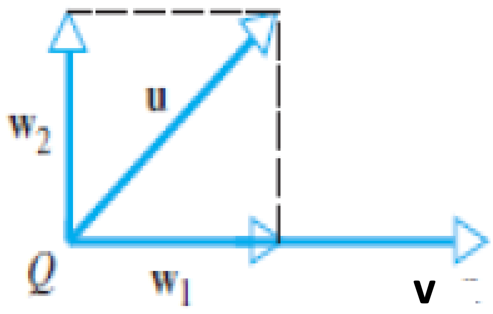
Proyeksi Ortogonal

- Jika **u** dan **v** adalah dua vektor di R^n dan **v** $\neq 0$, maka **u** dapat dinyatakan sebagai **u** = $\mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}$, yang dalam hal ini $\mathbf{w_1}$ adalah proyeksi **u** pada **v** dan $\mathbf{w_2}$ adalah komponen dari **u** yang orthogonal pada **v**.



Bagaimana cara menentukan $\mathbf{w_1}$ dan $\mathbf{w_2}$?

- Tinjau gambar ini:



$\mathbf{w_1}$ = proyeksi **u** pada **v**

= perkalian skalar k dengan **v**

= $k\mathbf{v}$

dan

$\mathbf{w_2}$ = komponen dari **u** yang orthogonal pada **v**.

maka

$$\mathbf{u} = \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2} = k\mathbf{v} + \mathbf{w_2}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (k\mathbf{v} + \mathbf{w_2})\cdot\mathbf{v} \\ &= k\,\|\mathbf{v}\|^2 + \mathbf{w_2}\cdot\mathbf{v} \\ &= k\,\|\mathbf{v}\|^2 \quad (\mathbf{w_2}\cdot\mathbf{v} = 0 \text{ sebab } \mathbf{w_2}\perp\mathbf{v}) \rightarrow k = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\end{aligned}$$

sehingga

$$\boxed{\mathbf{w_1} = k\,\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\cdot\mathbf{v}}$$

dan

$$\boxed{\mathbf{w_2} = \mathbf{u} - \mathbf{w_1} = \mathbf{u} - k\mathbf{v} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\cdot\mathbf{v}}$$

Contoh 10: Misalkan $\mathbf{u}$ = (2, –1, 3) dan $\mathbf{v}$ = (4, –1, 2), tentukan proyeksi orthogonal $\mathbf{u}$ pada $\mathbf{v}$ dan komponen $\mathbf{u}$ yang orthogonal dengan $\mathbf{v}$.

<u>Penyelesaian</u>:

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15$

$\|\mathbf{v}\|^2 = \left(\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (2)^2}\right)^2 = (4)^2 + (-1)^2 + (2)^2 = 16 + 1 + 2 = 21$

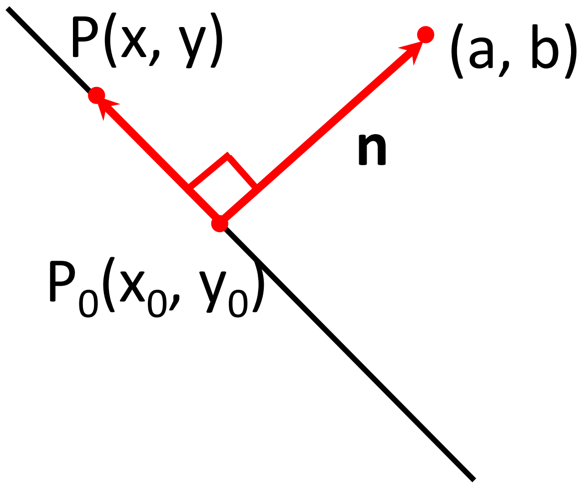
maka

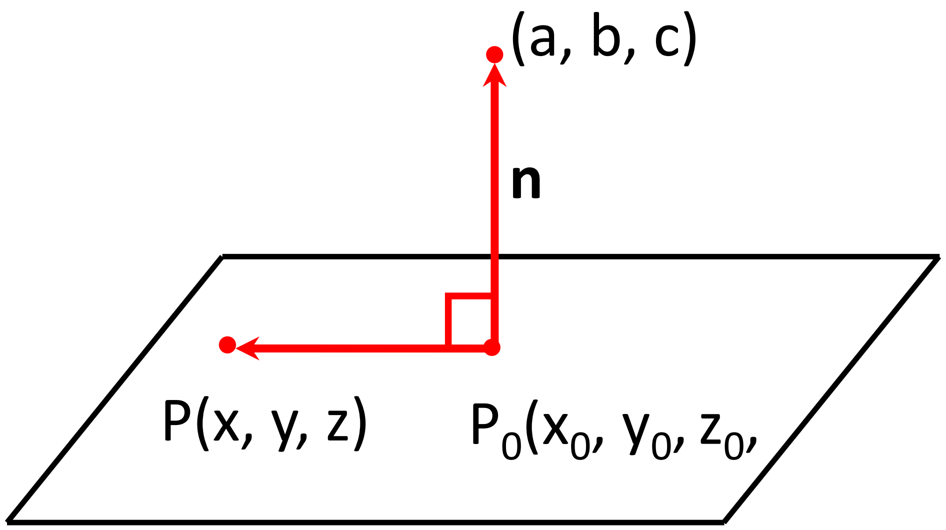
$\mathbf{w_1} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \cdot \mathbf{v} = \frac{15}{21}(4, -1, 2) = (20/7, -5/7, 10/7)$

$\mathbf{w_2} = \mathbf{u} - \mathbf{w_1} = (2, -1, 3) - (20/7, -5/7, 10/7) = (-6/7, -2/7, 11/7)$

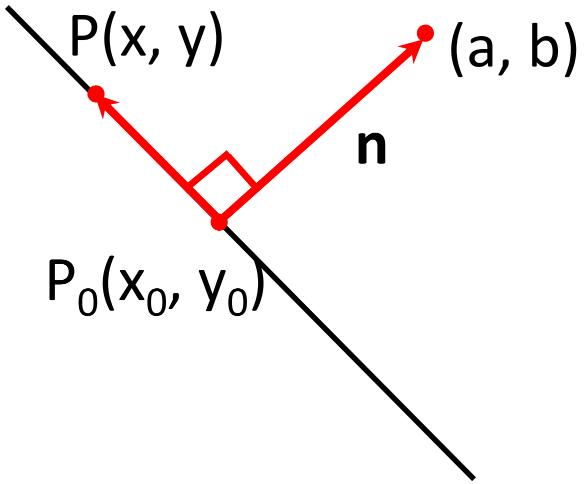
Vektor Normal

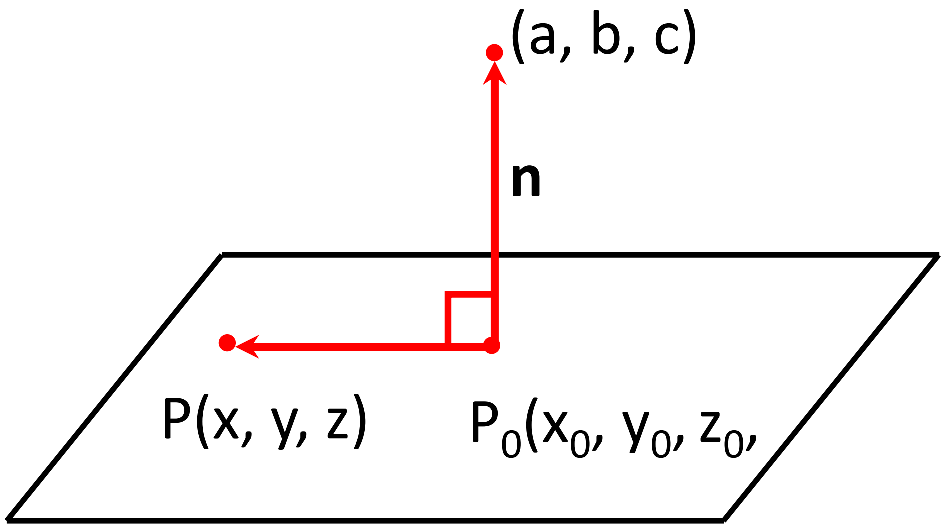
- Vektor normal (atau **normal** saja) adalah vector yang tegak lurus dengan sebuah garis atau sebuah bidang





n = vektor normal = normal





$\mathbf{n} = (a, b)$

$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0)$

$\mathbf{n}$ dan $\overrightarrow{P_0P}$ orthogonal, sehingga

$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0}$$

$\mathbf{n} = (a, b, c)$

$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

$\mathbf{n}$ dan $\overrightarrow{P_0P}$ orthogonal, sehingga

$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

Contoh 11:

(i) Persamaan $7(x - 1) + 2(y + 3) = 0$ menyatakan persamaan garis lurus yang melalui titik $(1, -3)$ dengan normal $\mathbf{n} = (7, 2)$.

(ii) (i) Persamaan $2(x - 3) - 5(y - 6) + 7z = 0$ menyatakan persamaan bidang yang melalui titik $(3, 6, 0)$ dengan normal $\mathbf{n} = (2, -5, 7)$.

Contoh 12: Carilah persamaan bidang yang melalui titik $P(2, 6, 1)$ dan tegak lurus dengan $\mathbf{n} = (1, 4, 2)$.

<u>Penyelesaian</u>: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$$1(x - 2) + 4(y - 6) + 2(z - 1) = 0$$

$$x - 2 + 4y - 24 + 2z - 2 = 0$$

$$x + 4y + 2z - 28 = 0$$

- Bentuk umum persamaan garis adalah $ax + by + c = 0$ dengan normal $\mathbf{n} = (a, b)$

- Bentuk umum persamaan bidang adalah $ax + by + cz + d = 0$ dengan normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$

Contoh 13: Carilah persamaan bidang yang melalui titik (3, 2, 1), (2, 1, –1), dan (–1, 3, 2).

<u>Penyelesaian</u>:

Persamaan bidang: $ax + by + cz + d = 0$

(3, 2, 1) → $3a + 2b + c + d = 0$

(2, 1, –1) → $2a + b - c + d = 0$

(–1, 3, 2) → $-a + 3b + 2c + d = 0$

SPL:

$$
\begin{aligned}
3a + 2b + c + d &= 0 \\
2a + b - c + d &= 0 \\
-a + 3b + 2c + d &= 0
\end{aligned}
$$

Selesaikan SPL dengan metode eliminasi Gauss untuk menemukan nilai a, b, c, dan d (solusi berbentuk parametrik, karena banyak sekali bidang yang melalui ketiga titik tersebut)

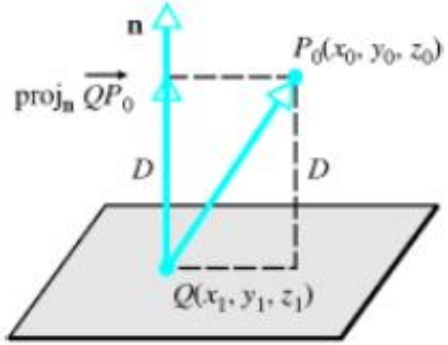
Jarak sebuah titik ke garis dan ke bidang

- Di R^2, jarak antara titik $P_0(x_0, y_0)$ dengan garis $ax + by + c = 0$ adalah

$$\boxed{d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

- Di R^3, jarak antara titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dengan bidang $ax + by + cz + d = 0$ adalah

$$\boxed{d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$



Distance from P_0 to plane.

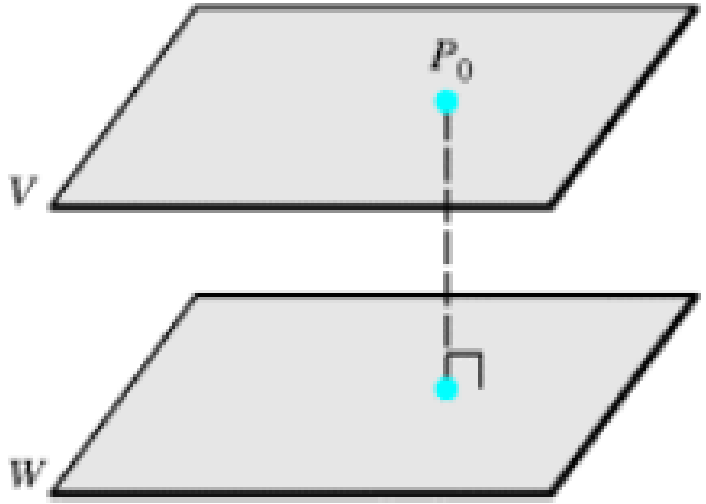
Contoh 14: Tentukan jarak dari titik (1, –4, –3) ke bidang 2x – 3y + 6z = -1

<u>Penyelesaian</u>:

2x – 3y + 6z = –1 → 2x – 3y + 6z + 1 = 0 →a = 2, b = –3, c = 6, d = 1

$$d = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2(1)+(-3)(-4)+6(-3)+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}} = \frac{3}{7}$$

Jarak antara dua bidang paralel



Jarak antara bidang V dan bidang W = jarak dari P_0 ke W

Contoh 15: Tentukan jarak antara bidang x + 2y – 2z = 3 dan bidang 2x + 4y – 4z = 7

Penyelesaian:

Bidang x + 2y – 2z – 3 = 0 → **n** = (1, 2, –2)

Bidang 2x + 4y – 4z – 7 = 0 → **n** = (2, 4, –4)

Pilih sebuah titik di bidang x + 2y – 2z – 3 = 0:

ambil y = 0, z = 0, maka x = 3 – 2y + 2z = 3 – 2(0) + 2(0) = 3

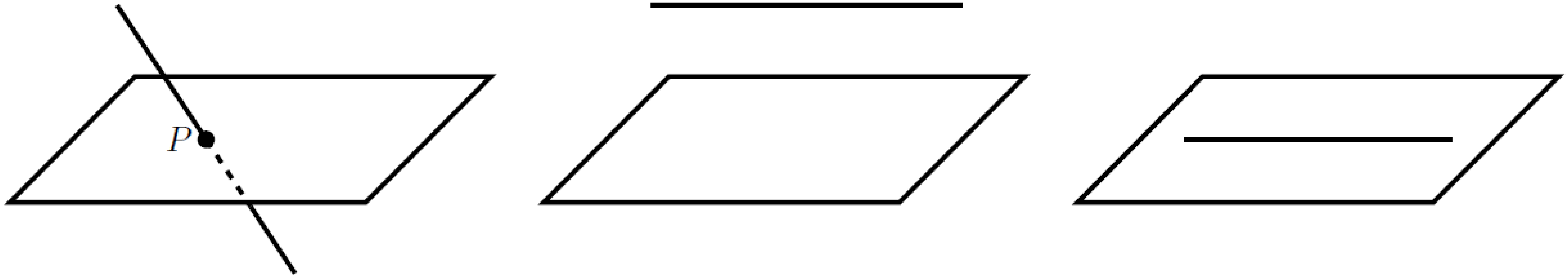
diperoleh titik (3, 0, 0)

Hitung jarak dari (3, 0, 0) ke bidang 2x + 4y – 4z – 7 = 0 sbb:

$$d = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2(3)+4(0)+(-4)(0)-7|}{\sqrt{2^2+4^2+(-4)^2}} = \frac{1}{6}$$

Perpotongan garis dengan bidang

- Kedudukan sebuah garis dengan bidang dapat memiliki tiga kemungkinan:
  1. Garis memotong bidang di sebuah titik
  2. Garis sejajar dengan bidang
  3. Garis terletak pada bidang



Sumber: MIT Open CourseWare. http://ocw.mit.edu

Contoh 16: Diketahui bidang P dengan persamaan $2x + y - 4z = 4$.

(a) Tentukan semua titik potong P dengan garis $x = t$, $y = 2 + 3t$, $z = t$

(b) Tentukan semua titik potong P dengan garis $x = 1 + t$, $y = 4 + 2t$, $z = t$

(c) Tentukan semua titik potong P dengan garis $x = t$, $y = 4 + 2t$, $z = t$

<u>Penyelesaian</u>: Ket: Persamaan garis dalam bentuk parametrik

a) Sulihkan x, y, dan z ke dalam persamaan bidang:

$$2(t) + (2 + 3t) - 4(t) = 4 \rightarrow t = 2$$

Gunakan t untuk menemukan $(x, y, z) = (2, 8, 2)$ → berpotongan pada satu titik

b) Sulihkan x, y, dan z ke dalam persamaan bidang:

$2(1 + t) + (4 + 2t) - 4(t) = 4 \rightarrow 6 = 4 \rightarrow$ tidak ada nilai t yang memenuhi persamaan ini

→ garis sejajar dengan bidang

c) Sulihkan x, y, dan z ke dalam persamaan bidang:

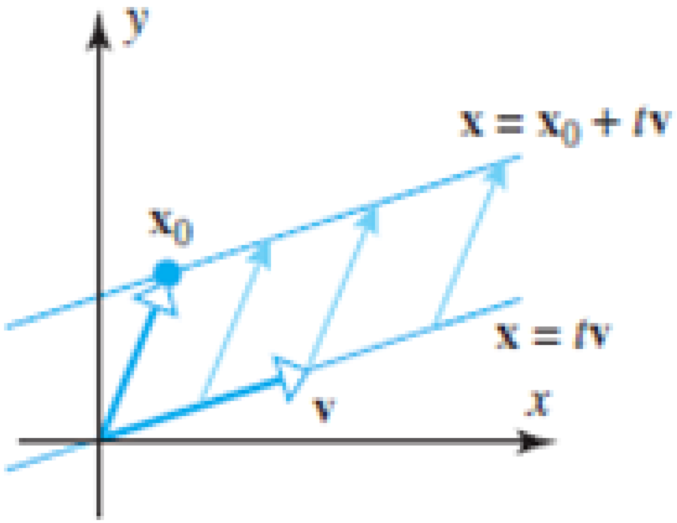
$2(t) + (4 + 2t) - 4(t) = 4 \rightarrow 4 = 4 \rightarrow$ semua nilai t memenuhi persamaan ini

→ garis terletak pada bidang

Vektor dan persamaan parametrik garis di R^2 dan R^3

- Misalkan L adalah garis di R^2 atau R^3 yang mengandung titik $\mathbf{x_0}$ dan paralel dengan vektor $\mathbf{v}$. Persamaan garis yang melalui $\mathbf{x_0}$ dan parallel dengan $\mathbf{v}$ adalah

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t\mathbf{v}$$



- Jika $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$, maka persamaan garis yang melalui titik asal menjadi

$$\mathbf{x} = t\mathbf{v}$$

Contoh 17: Tentukan persamaan vektor dan persamaan parametrik garis yang melalui titik asal dan parallel dengan vector **v** = (–2, 3).

Penyelesaian:

(i) Persaman vector: $\mathbf{x} = t\mathbf{v}$

Misalkan $\mathbf{x} = (x, y)$, maka $(x, y) = t(-2, 3)$.

(ii) Persamaan parametrik garis: $x = -2t$ dan $y = 3t$

Contoh 18: Tentukan persamaan vektor dan persamaan parametrik garis yang melalui titik $P_0(1, 2, -3)$ dan paralel dengan vector **v** = (4, –5, 1).

Penyelesaian:

(i) Persaman vector: $\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t\mathbf{v}$

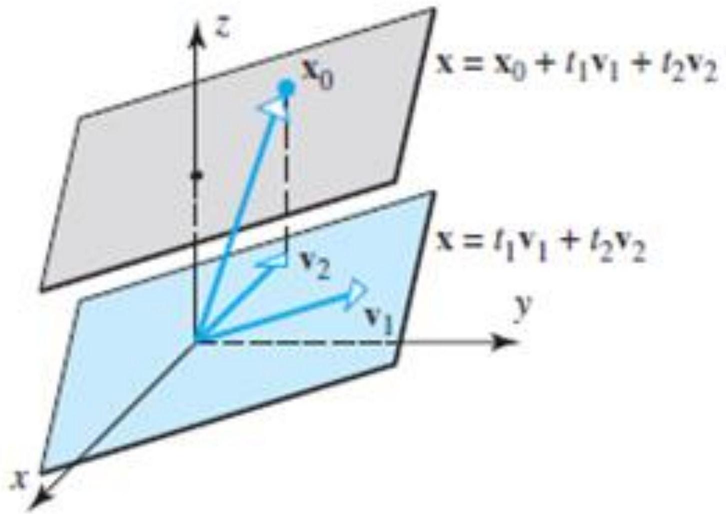
Misalkan $\mathbf{x} = (x, y, z)$, maka $(x, y, z) = (1, 2, -3) + t\,(4, -5, 1)$

(ii) Persamaan parametrik garis: $x = 1 + 4t$, $y = 2 - 5t$, $z = -3 + t$

Vektor dan persamaan parametrik bidang di R^3

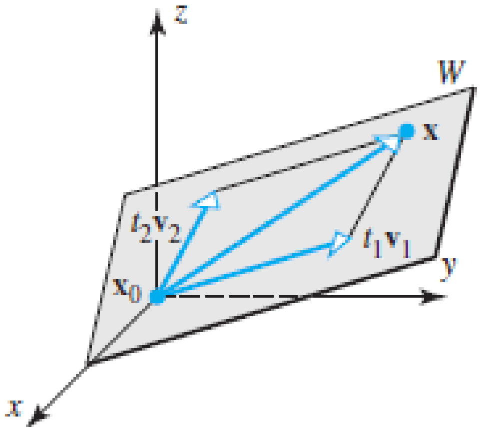
- Misalkan W adalah bidang di R^3 yang mengandung titik $\mathbf{x_0}$ dan paralel dengan vektor $\mathbf{v_1}$ dan $\mathbf{v_2}$. Persamaan bidang yang melalui $\mathbf{x_0}$ dan parallel dengan $\mathbf{v_1}$ dan $\mathbf{v_2}$ adalah

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v_2}$$



- Jika $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$, maka persamaan bidang yang melalui titik asal menjadi

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v_2}$$



Contoh 19: Tentukan persamaan garis (dalam notasi vector) dan persamaan parametrik garis yang melalui titik asal dan parallel dengan vector **v** = (5, –3, 6, 1).

<u>Penyelesaian</u>:

(i) Persaman garis (dalam notasi vektor): $\mathbf{x} = t\mathbf{v}$

Misalkan **x** = (w, x, y, z), maka (w, x, y, z) = t(5, –3, 6, 1).

(ii) Persamaan parametrik garis: w = 5t, x = –3t, y = 6t, z = t

Contoh 20: Tentukan persamaan bidang (dalam notasi vektor) dan persamaan parametrik bidang yang melalui titik $\mathbf{x_0}(2, -1, 0, 3)$ dan paralel dengan vector $\mathbf{v_1} = (1, 5, 2, -4)$ dan $\mathbf{v_2} = (0, 7, -8, 6)$.

<u>Penyelesaian</u>:

(i) Persaman bidang (dalam notasi vektor): $\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v_2}$

Misalkan **x** = (w, x, y, z), maka $(w, x, y, z) = (2, -1, 0, 3) + t_1(1, 5, 2, -4) + t_2(0, 7, -8, 6)$

(ii) Persamaan parametrik bidang: $w = 2 + t_1$, $x = -1 + 5t_1 + 7t_2$, $y = 2t_1 - 8t_2$, $z = 3 - 4t_1 + 6t_2$

Latihan soal (diambil dari soal UTS)

1. Diketahui tiga buah vektor $\mathbf{u}$=(2,-6,2), $\mathbf{v}$=(0,4,-2), $\mathbf{w}$=(2,2,-4).

   a). Perlihatkan apakah {$\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$} merupakan himpunan orthogonal

   b). Tentukan panjang vektor proyeksi orthogonal $\mathbf{u}$ pada vektor $\mathbf{w}$

2. Diberikan 4 buah titik di ruang yakni, A(0,1,-1); B(1,1,2); C(2,2,1), P(3,3,3)

   a). Tentukan persamaan bidang yang melewati titik A,B, dan C dalam bentuk vektor.

   b). Pertanyaan sama dengan a) dengan menggunakan normal bidang

   c). Hitungalah jarak titik P ke bidang tersebut.

   d). Hitunglah luas segitiga ABC.

3. Diberikan dua persamaan bidang sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 3x - 4y + 2z &= 1 \\ x - 2y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

a) Periksa apakah dua bidang tersebut parallel atau berpotongan, berikan alasan. *(nilai 10)*

b) Jika bidang tersebut berpotongan, tentukan persamaan garis yang merupakan perpotongannya, jika parallel tentukan jaraknya. *(nilai 10)*

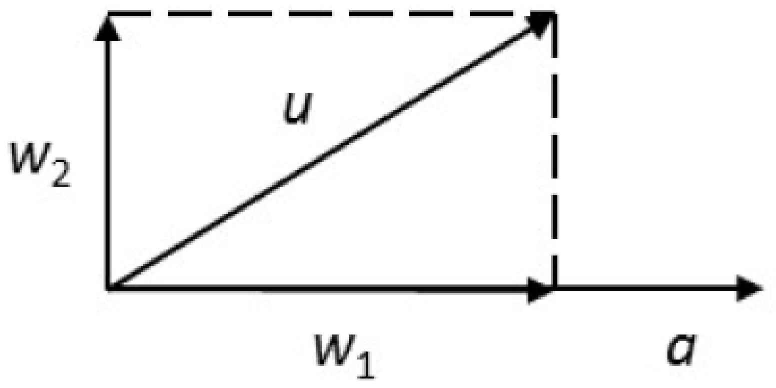
4. Diberikan dua persamaan bidang sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 3x - 4y + z &= 1 \\ 6x - 8y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

a). Periksa apakah dua bidang tersebut parallel atau berpotongan.

b). Jika bidang tersebut parallel tentukan jarak antara keduanya.

5. Perhatikan gambar berikut



w_1 adalah projeksi vektor **u**=(2,1,1,2) pada vektor **a**=(4,-4,2,-2), sedangkan w_2 adalah vektor yang orthogonal dengan vektor **a**. Jika vektor **u** dinyatakan sebagai $w_1 + w_2$, tentukan w_1 dan w_2.

6. Tentukan normal dari bidang yang melewati tiga titik P(9,0,4), Q(-1,4,3), dan R(0,6,-2), kemudian tentukan persamaan bidangnya.